Université Paris-Diderot — Année 2013-2014
MA2 - Algèebre et analyse élémentaires II — L1 MASS-2

Feuille de TD 12 - Équations différentielles

Questions du cours.

(a) Donner la définition d'équation différentielle d'ordre n.

(b) Donner la définition d'équation différentielle linéaire, et d'équation différentielle linéaire homogène associée.

(c) Qu'est-ce que c'est un problème de Cauchy ?

(d) Énoncer le théorème d'existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

(e) Décrire la procédure de résolution d'une équation différentielle d'ordre 1 à variables séparables.

(f) Décrire la procédure de résolution d'une équation différentielle d'ordre 1 avec la méthode de variation de la variable.

(g) Décrire la procédure de résolution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants.

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles, en spécifiant le domaine de définition :

(a) $y' = e^{-2x}$, (b) $y' = x^3 - 4x$, (c) $y' = \sqrt{1-x^2}$,

(d) $y'' = \cos x$, (e) $y'' = \tan^2 x$, (f) $y'' = \frac{1}{x}$,

(g) $y^{(n)} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

(a) $y' = -\frac{x^2}{(y+1)^4}$, (b) $y' - 3y - x = 0$, (c) $xy' = 1$,

(d) $xy' - 2y = 0$, (e) $y' = xe^{x-y}$, (f) $(1+x^2)y' + xy + x = 0$.

Exercice 3. Résoudre chacune des équations différentielles suivantes.

(a) $y' - 3y = 2$, (b) $y' + 2y = e^{2x}$, (c) $y' - 5y = e^{5x}$,

(d) $y' - 3x^2y = x^2$, (e) $y' + 3x^2y = x^2$, (f) $y' - y = \sin x$.

Suggestion : chercher d'abord toutes les solutions de l'équation obtenue en remplaçant le second membre par 0 *; en suite, trouver une solution particulière de l'équation complète, et en déduire l'espace complet des solutions.*

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$(*) \qquad (1-x^2)y' - 2xy = 1.$$

(a) Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation différentielle (*).

(b) Déterminer la solution qui pour $x = 0$ prend la valeur 1.

(c) Résoudre (*) sur $]-\infty,-1[$.

(d) Que se passe-t-il au point $x = -1$?

Exercice 5. Résoudre chacune des équations différentielles suivantes, en précisant soigneusement l'intervalle de résolution, et en utilisant la méthode de variation de la constante :

(a) $(\cos x)y' - (\sin x)y + \cos x = 0$, (b) $y' + y\tan x = \sin x$,

(c) $y' + y\tan x = \cos x$, (d) $x^3y' + 4(1-x^2)y = 0$,

(e) $y'\tan x + y - \sin x = 0$, (f) $xy' + y = 2x$.

Exercice 6. Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

(a) $y' + 3y = 0$, (b) $y'' - 5y' + 6y = 0$, (c) $y'' - 3y' = 0$,

(d) $y'' - 2y' + 2y = 0$, (e) $y'' + 2y' + y = 0$, (f) $y''' + y'' = y' + y$,

(g) $y^{(4)} = y$, (h) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Exercice 7. Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

(a) $y'' + 2y' - 8y = e^{3x}$, (b) $y'' - 3y' - 18y = xe^{4x}$,

(c) $y'' - 10y' - 41y = \sin x$, (d) $y'' + 2y - 3y = (x+1)e^x$,

(e) $y'' + 4y = \cos 2x$, (f) $y'' - 2y' + y = (x+1)e^x$.

Exercice 8. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

(a) $y'' - 2y' + 2y = 1$, (b) $y'' - 2y' + 2y = \cos 2x$, (c) $y'' - 2y' + 2y = \sin^2 x$.

Exercice 9. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(*) \qquad xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

(a) Faire la substitution $u = \frac{y}{x}$, et écrire l'équation (*) en fonction de u', u et x.

(b) Resoudre la nouvelle équation obtenue au point (a).

(c) Vérifier les solutions obtenues au point (b) directement dans l'équation (*).

Exercice 10. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(*) \qquad 2yy' = xe^{y^2}.$$

(a) Faire la substitution $u = y^2$, et écrire l'équation (*) en fonction de u', u et x.

(b) Resoudre la nouvelle équation obtenue au point (a).

(c) En déduire les solutions de l'équation (*).

Exercice 11. Résoudre le problèmes de Cauchy suivants :

(a) $\begin{cases} y' - y = \cos x, \\ y(0) = -1. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y' = y^2 \arctan(x), \\ y(1) = 0. \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y' - xy = x^3, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Exercice 12. Considerer le problème de Cauchy suivant :

$$(*) \qquad \begin{cases} xy' - y = x, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

(a) Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle $xy' - y = x$.

(b) Déterminer la solution y_1 du problème de Cauchy (*) pour $x_0 = y_0 = 1$.

(c) Montrer que y_1 s'étend par continuité en 0, en calculer la valeur $y_1(0)$.

(d) Que se passe-t-il pour les solutions de (*) quand $x_0 = 0$?